

Pi greco, la fase, l'interferenza: dalla fisica classica alla fisica quantistica

Lucio Andreani

Dipartimento di Fisica, Università di Pavia

<http://fisica.dip.unipv.it/>

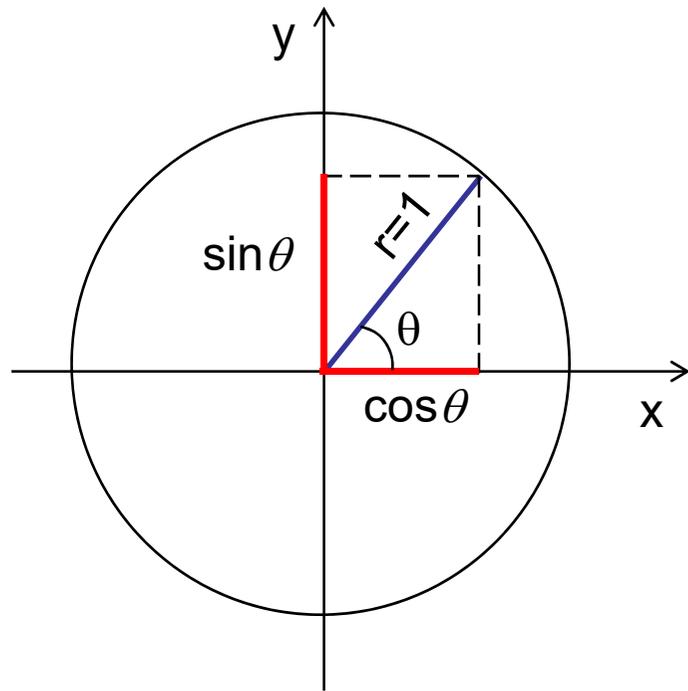
<https://fiscapaviaeducational.it/eventi/>

π -day, Pavia, 14 marzo 2023

Indice

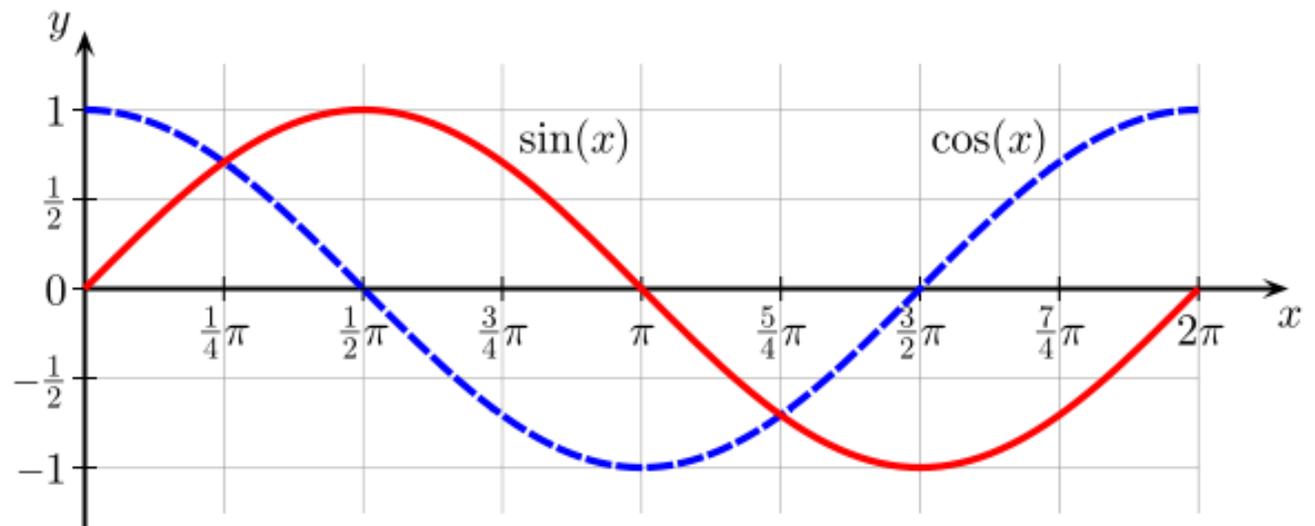
- 1. Preliminari: seno e coseno, moto armonico, fase**
2. Le onde in fisica classica
3. Le onde in meccanica quantistica
4. Interferometria

Seno e coseno

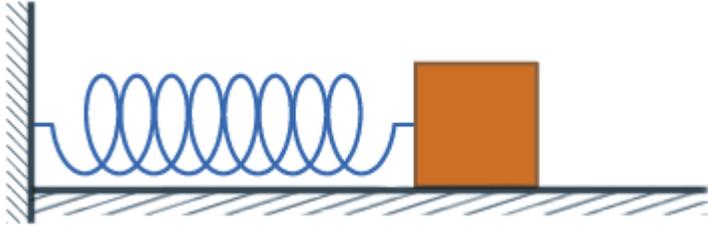


Data una circonferenza di raggio unitario, si definisce il coseno (seno) di un angolo α la lunghezza della proiezione del raggio sull'asse x (y).

Il seno e il coseno sono funzioni periodiche (sinusoidi) con periodicità pari a 2π .



Moto armonico e fase



Il moto armonico è un moto oscillatorio prodotto da una forza di tipo elastico.

Il moto armonico è descritto da una legge del tipo

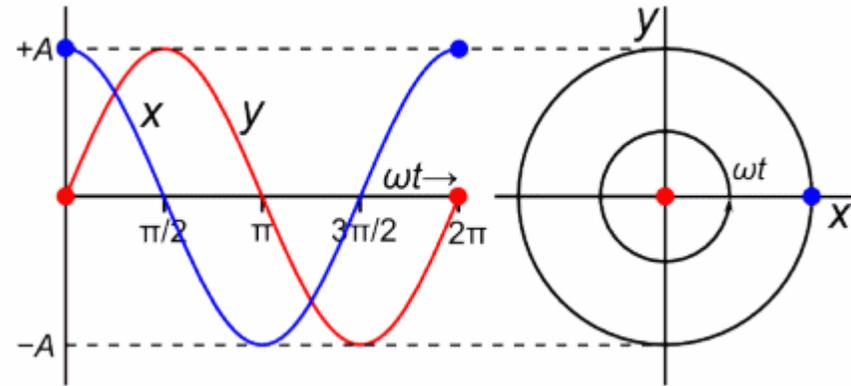
$$y = A \cos(\omega t),$$

dove t è il tempo e ω la *pulsazione* o *frequenza angolare*, legata alla frequenza ν e al periodo T da:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

Più in generale possiamo scrivere: $y = A \cos(\omega t + \phi_0) = A \cos \phi(t)$,

dove $\phi(t) = \omega t + \phi_0$ è detta la **fase** del moto armonico.



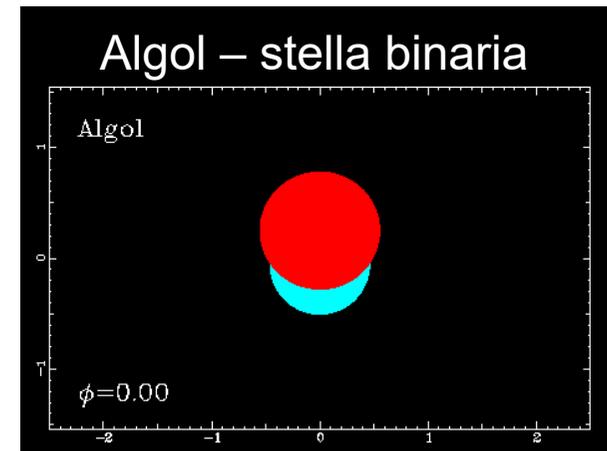
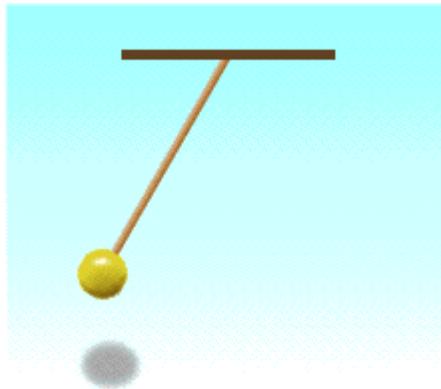
Esempi di moto armonico...



© Friedrich A. Lohmüller, 2012



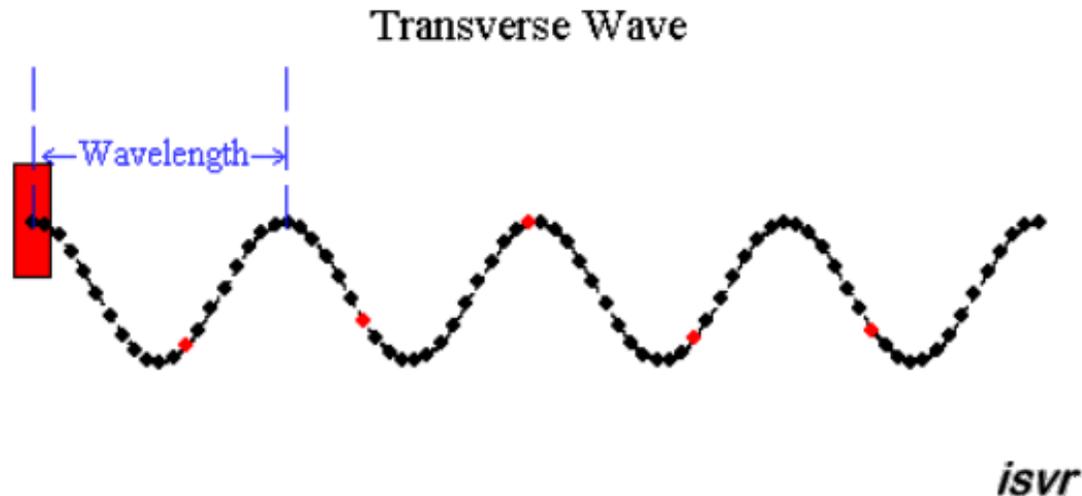
Frequenza $f=440$ Hz



Stella variabile (binaria a eclisse),
Periodo $T=2.867$ giorni

Onde

Un'onda è una perturbazione, prodotta da una sorgente, che si propaga nello spazio senza trasporto di materia, ma solo di energia.

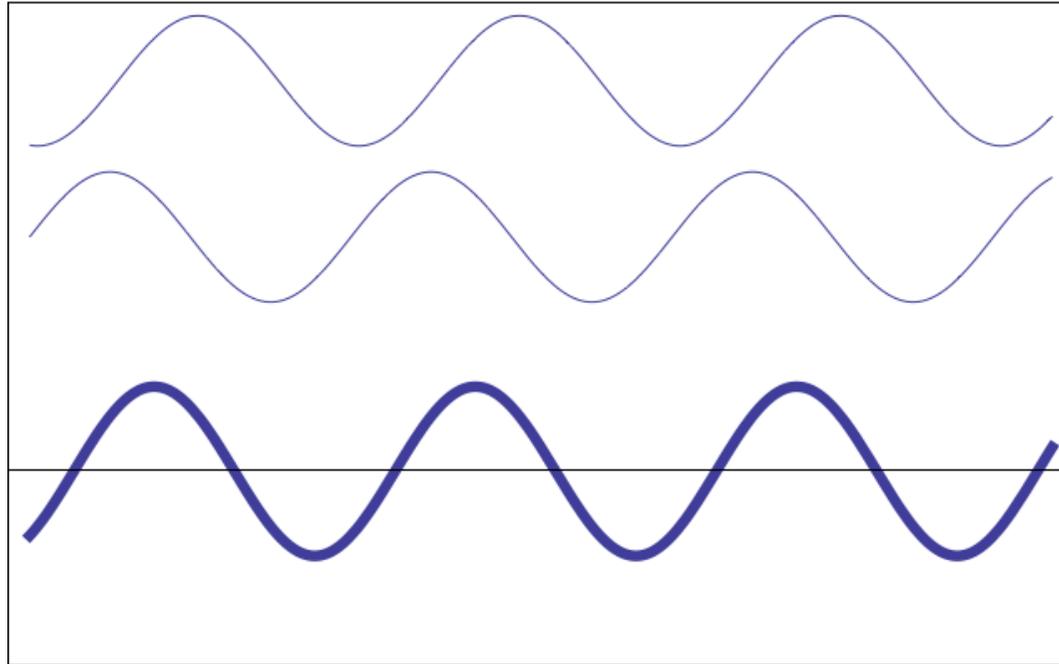


L'equazione che descrive la propagazione dell'onda è:

$$f(x,t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \omega t + \phi_0\right) = A \cos \phi(t)$$

dove $f(x,t)$ è detta *funzione d'onda*, λ è la **lunghezza d'onda** e $\phi(t)$ è la **fase**.

Interferenza



$$f(x,t) = f_1 + f_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t + \phi_0\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t\right)$$

Se la fase relativa $\phi_0=0$:
interferenza costruttiva,

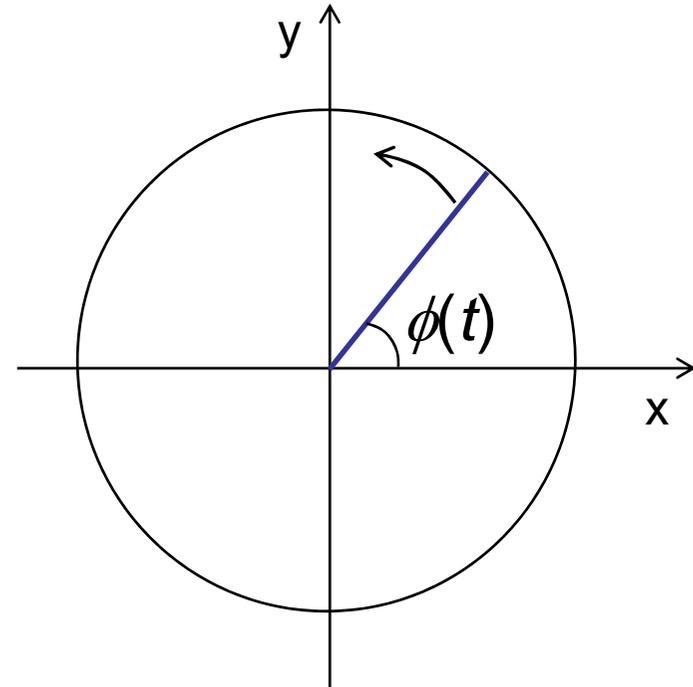
$$f(x,t) = 2f_1$$

Se la fase relativa $\phi_0=\pi$:
interferenza distruttiva,

$$f(x,t) = 0$$

Con i numeri complessi è più semplice...

$$e^{i\phi(\mathbf{r},t)} = \cos \phi(\mathbf{r},t) + i \sin \phi(\mathbf{r},t)$$



... e l'interferenza distruttiva diventa l'identità di Eulero:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Indice

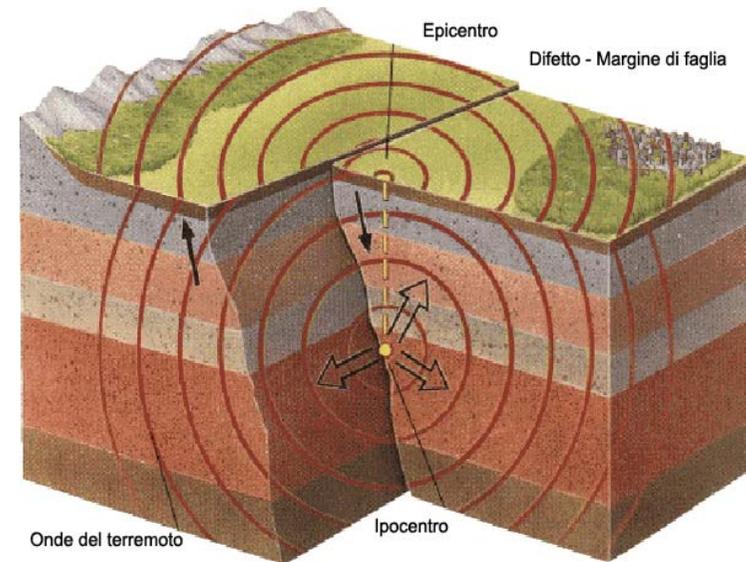
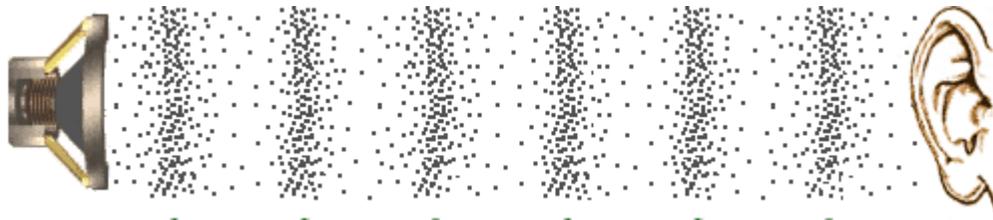
1. Preliminari: seno e coseno, moto armonico, fase
- 2. Le onde in fisica classica**
3. Le onde in meccanica quantistica
4. Interferometria

Esempi di onde (meccaniche)

Onda trasversale in una corda



Onda sonora longitudinale



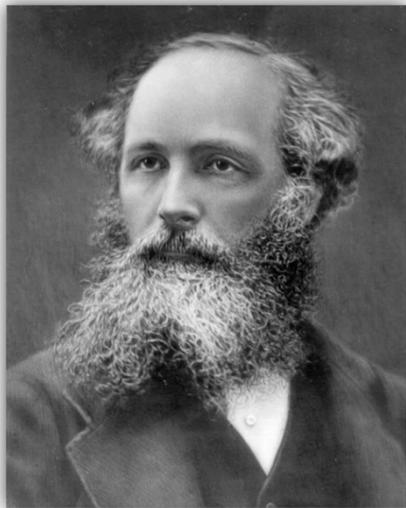
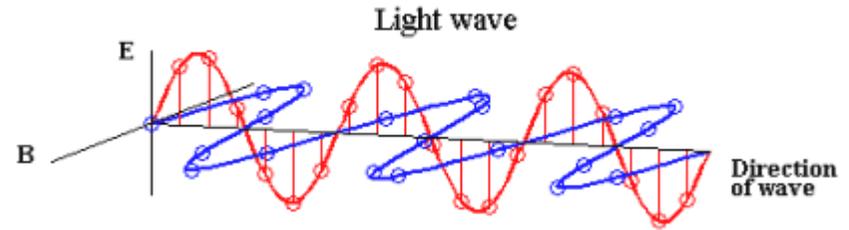
Onda sismica

Interferenza...



Le onde elettromagnetiche

Le onde elettromagnetiche consistono di oscillazioni del campo elettrico E e del campo magnetico B , trasversali rispetto alla direzione di propagazione.



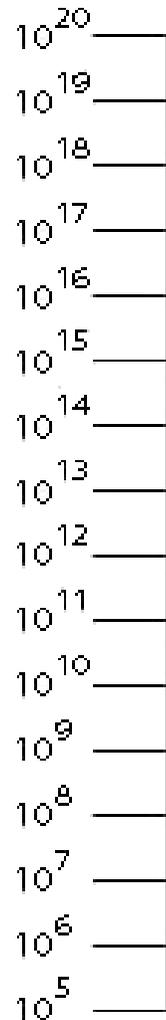
L'esistenza delle onde elettromagnetiche è stata prevista da James Clerk Maxwell (1862).

Il primo esperimento sulla generazione di onde elettromagnetiche è dovuto a Heinrich Hertz (1887).

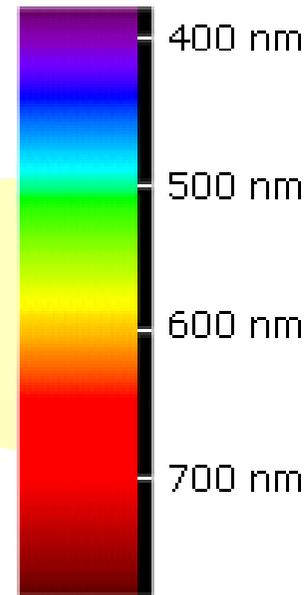


Lo spettro delle onde elettromagnetiche

Frequenza ν , Hz



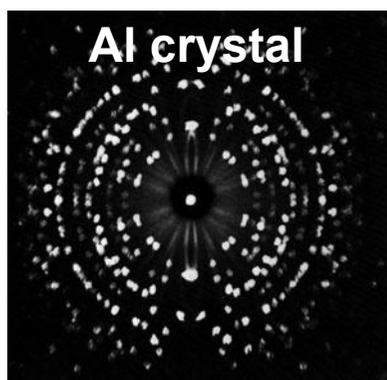
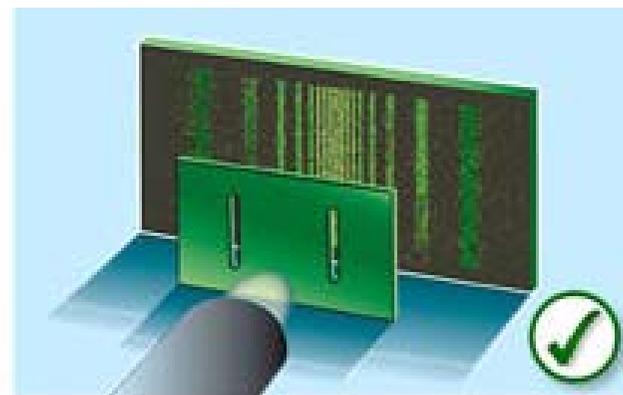
Lunghezza d'onda λ



La luce visibile consiste di onde elettromagnetiche con lunghezza d'onda λ compresa fra 380 e 760 nm ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) e frequenza $\nu = c/\lambda$, dove $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ è la velocità della luce.

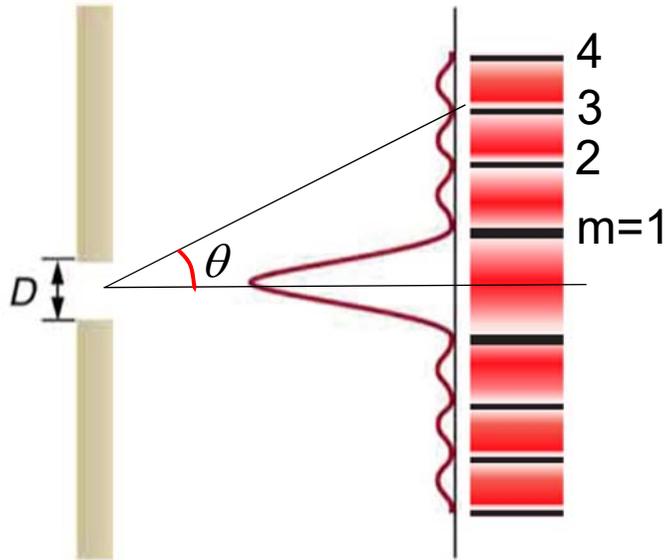
La natura ondulatoria della luce

La natura ondulatoria della luce si manifesta nei fenomeni di *interferenza*, dovuti alla sovrapposizione nello spazio di due o più onde. Si può osservare ad esempio nella diffrazione di luce da una doppia fenditura, il famoso *esperimento di Young* (~1800).



Anche i *raggi X* (scoperti da Röntgen nel 1895), in quanto onde elettromagnetiche, danno origine a figure di diffrazione quando vengono riflessi dai piani reticolari di un cristallo. La diffrazione di raggi X (scoperta da von Laue, 1912) è la tecnica principale per determinare le strutture cristalline.

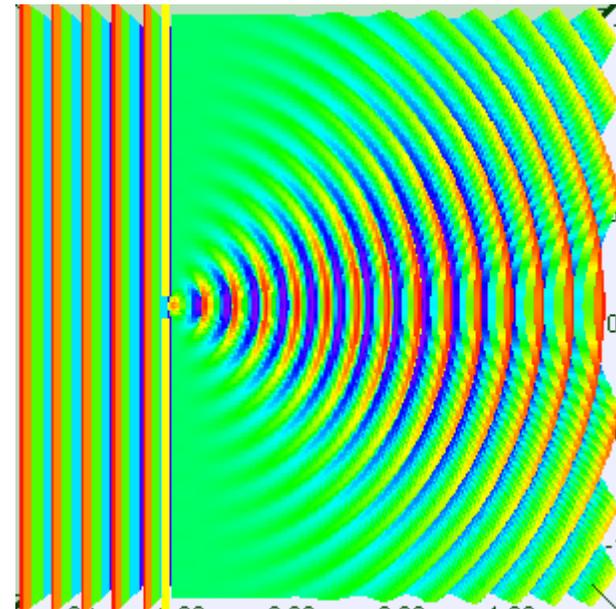
Diffrazione di luce da una fenditura



Un'onda piana incidente su una fenditura produce una figura di diffrazione su uno schermo, caratterizzata da frange chiare e scure. La posizione delle frange dipende dalla larghezza D e dalla lunghezza d'onda λ :

$$D \sin \theta = m\lambda \quad \text{posizione delle frange scure}$$

Questo fenomeno, di natura tipicamente ondulatoria, è dovuto all'interferenza delle onde luminose generate dalle sorgenti di onde sferiche individuate dalla fenditura (principio di Huygens).



Indice

1. Preliminari: seno e coseno, moto armonico, fase
2. Le onde in fisica classica
- 3. Le onde in meccanica quantistica**
4. Interferometria

Meccanica quantistica: impulso e lunghezza d'onda, la relazione di de Broglie

Secondo l'ipotesi di de Broglie (1924), la materia ha anche carattere ondulatorio. La lunghezza d'onda di una particella con impulso $p=mv$ è data da

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

dove $h=6.626 \cdot 10^{-34}$ J·s è la **costante di Planck**.
[N.b. relatività speciale: $p=\gamma m_0 v$, $E=\gamma m_0 c^2$...]

Qual è la lunghezza d'onda...

... di un **elettrone**?

Massa $m=0.91 \cdot 10^{-30}$ kg

Velocità $v=10^6$ m/s

$\Rightarrow \lambda=7.3 \cdot 10^{-10}$ m



... di un **pallone da calcio**?

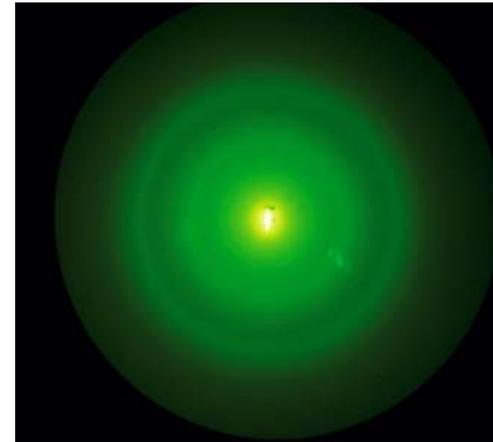
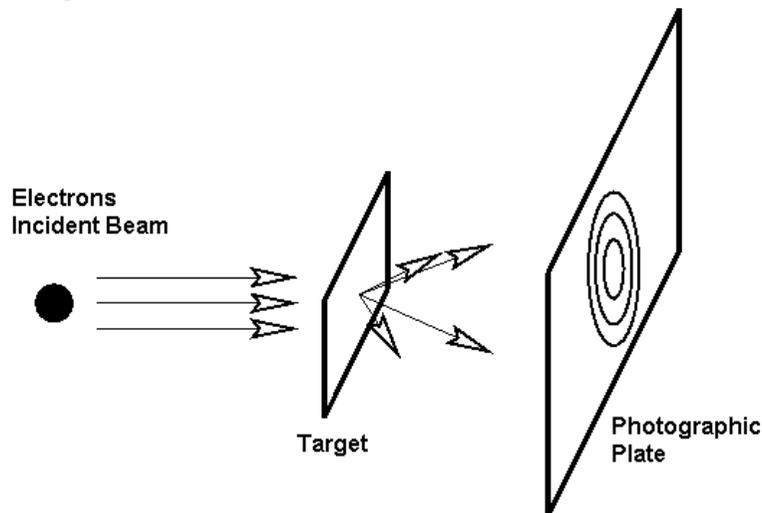
$m=420$ g

$v=100$ km/h

$\Rightarrow \lambda=5.7 \cdot 10^{-35}$ m

Interferenza e diffrazione di elettroni

La natura ondulatoria della materia fa sì che si possano osservare effetti di interferenza e diffrazione di particelle quali elettroni e atomi. Negli esperimenti di Davisson-Germer e di Thomson (1927), un fascio di elettroni incide su un reticolo cristallino e produce una immagine di diffrazione su uno schermo.



Questa osservazione è analoga alla diffrazione di raggi X dai cristalli, ed è la prova diretta delle proprietà ondulatorie della materia, che sono alla base della **meccanica quantistica**.

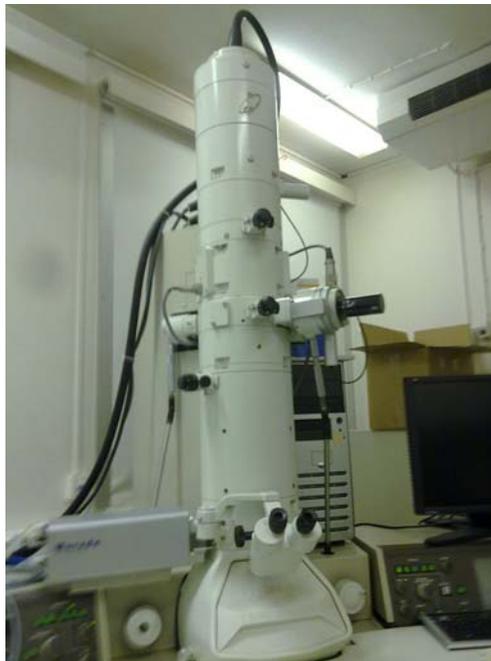
Dualità onda-particella



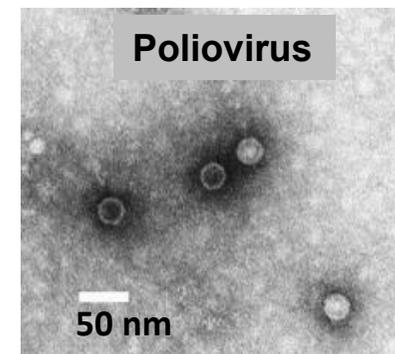
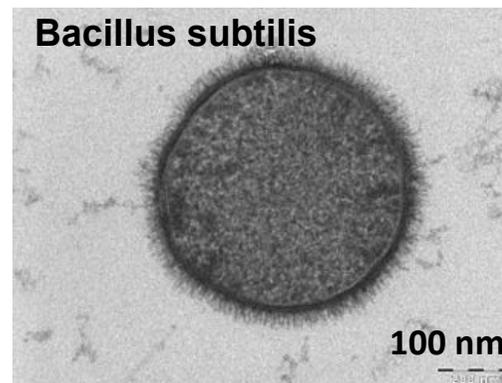
https://www.youtube.com/watch?v=Xmq_FJd1oUQ

Il microscopio elettronico: TEM

Il potere risolutivo del microscopio ottico è limitato dalla lunghezza d'onda della luce visibile, ~400-700 nm.



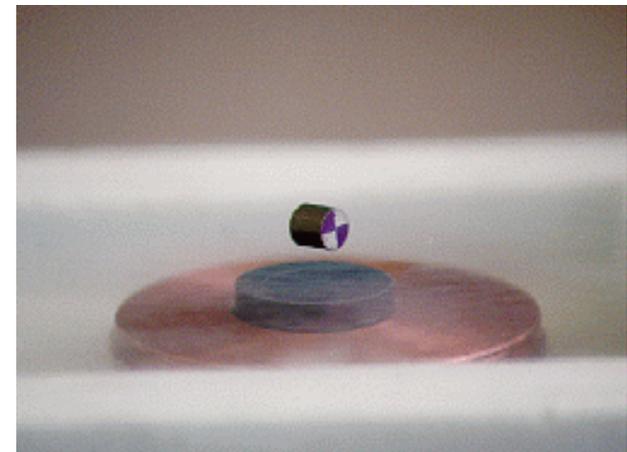
Il TEM (Transmission Electron Microscope) ha una risoluzione molto maggiore in quanto utilizza elettroni accelerati ad alte energie (fino a 300 keV) con lunghezze d'onda dell'ordine di $2 \text{ pm} = 2 \cdot 10^{-12} \text{ m}$. Questo permette di ottenere immagini di oggetti molto piccoli quali reticoli cristallini e nanostrutture, batteri, virus, proteine...



La fase macroscopica coerente

La fase quantistica della funzione d'onda è solitamente una proprietà delle particelle microscopiche... Ma in certe situazioni può diventare una quantità macroscopica, producendo effetti che si toccano con mano!

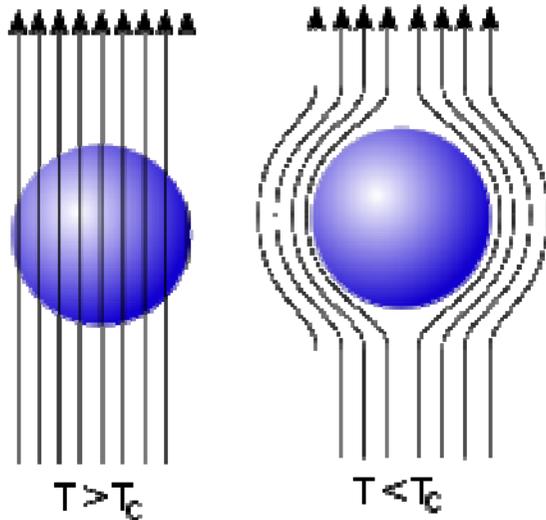
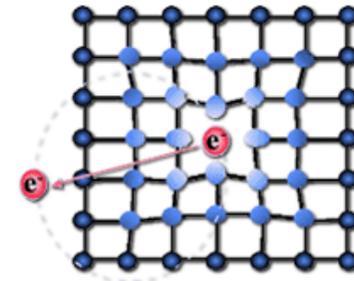
In un materiale superconduttore, gli elettroni formano stati correlati e acquistano una **fase macroscopica coerente**, che è responsabile fra l'altro del fenomeno della **levitazione magnetica**.



Su questo principio si basa il treno a levitazione magnetica o MAGLEV, che è operativo in Cina e in Giappone e che detiene il record di velocità per il trasporto su rotaia (603 km/h: serie L0, 04/2015).

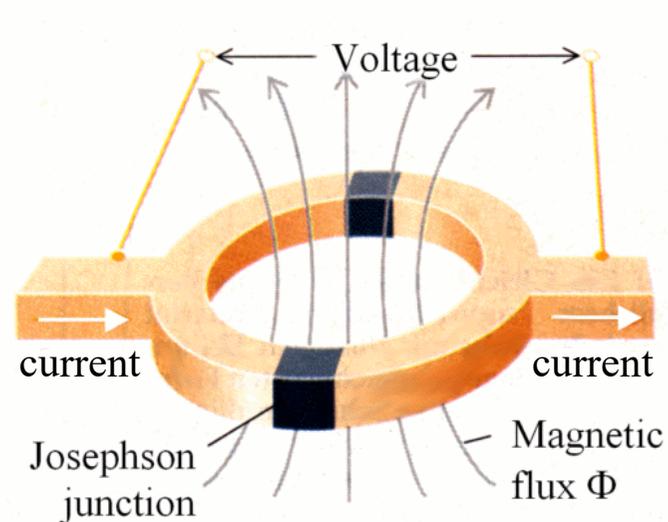
Cosa succede in un superconduttore?

Quando un superconduttore viene raffreddato al di sotto di una temperatura critica T_c , gli elettroni interagendo con le vibrazioni del reticolo formano coppie, dette **coppie di Cooper**. Nello stesso tempo la resistenza elettrica tende a zero e la corrente scorre senza dissipazione di energia, a differenza dei metalli normali.



Lo stato superconduttivo è uno stato collettivo nel quale tutte le coppie di Cooper nella funzione d'onda $\Psi(\mathbf{r})$ hanno la stessa **fase macroscopica coerente**. Ciò produce la proprietà di **diamagnetismo perfetto**: il superconduttore espelle un campo magnetico esterno (effetto Meissner), modificandone le linee di flusso. L'effetto Meissner è alla base del fenomeno della **levitazione magnetica**.

Sfruttare la fase: lo SQUID



Nel dispositivo detto **SQUID** - **Superconducting Quantum Interference Device**, la corrente che scorre attraverso la doppia giunzione fra due superconduttori è dovuta al tunnelling quantistico e dipende dalla fase macroscopica nei superconduttori. Per questa ragione la corrente è estremamente sensibile al flusso di campo magnetico concatenato con l'anello.

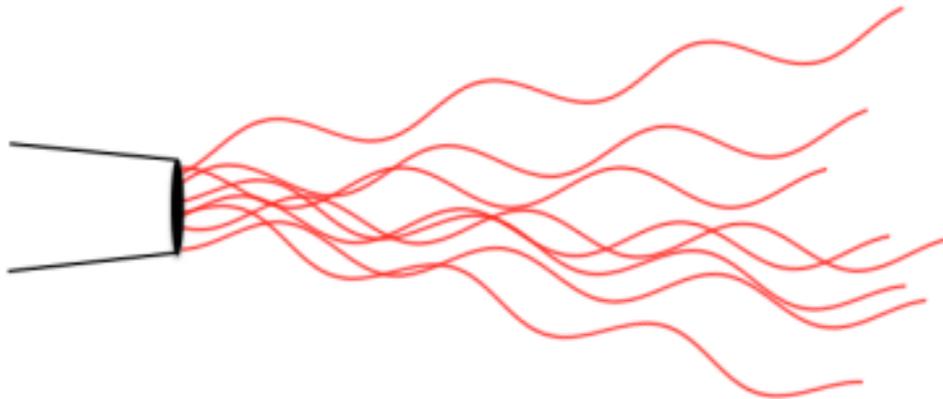
Nella **MEG** o **magnetoencefalografia** si utilizzano sistemi a SQUID per misurare i piccolissimi campi magnetici legati all'attività cerebrale ($\sim 10^{-15}$ T), con elevata risoluzione spaziale e temporale. La tecnica, totalmente non-invasiva, ha notevoli applicazioni nel campo delle neuroscienze.



Fase coerente: la luce laser



La luce emessa da un laser è **coerente**:
tutti i fotoni hanno *la stessa fase*
⇒ direzionalità, brillantezza...



Invece la luce di un LED è **incoerente**:
i fotoni emessi hanno fasi casuali



Lunar laser ranging experiment... misurare la distanza della Luna con il laser

Retroriflettore sulla Luna
(Apollo 11, 1969)



Misura della distanza tramite il
tempo di ritorno del segnale (≈ 2.5 s)



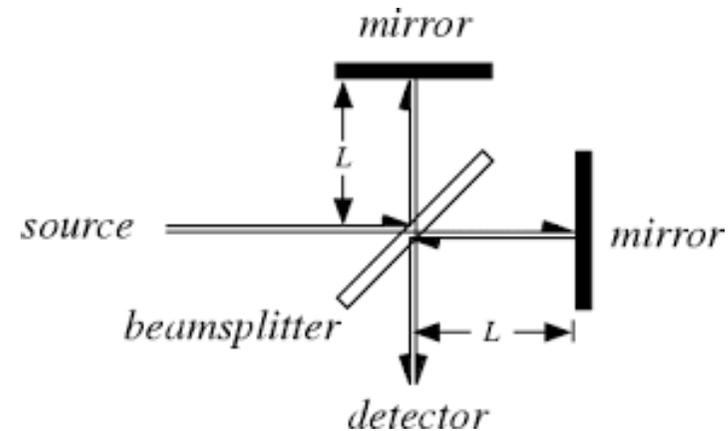
La distanza media Terra-Luna è di 384'467 chilometri; la distanza istantanea può essere misurata con la precisione di 1 mm!

Indice

1. Preliminari: seno e coseno, moto armonico, fase
2. Le onde in fisica classica
3. Le onde in meccanica quantistica
- 4. Interferometria**

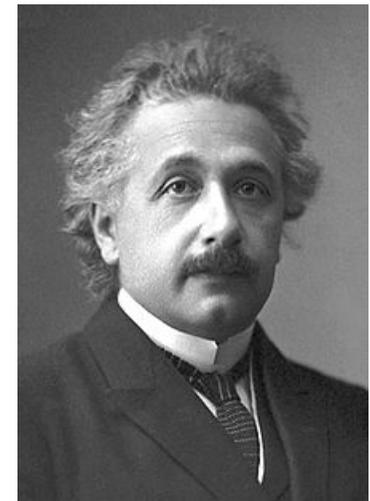
L'interferometro di Michelson: velocità della luce e relatività.

Tutte le onde meccaniche hanno bisogno di un mezzo in cui propagarsi – qual è il mezzo in cui si propaga la luce? Esiste un etere di natura meccanica? La risposta a questa domanda venne con l'esperimento di Michelson e Morley (1887), effettuato con ***l'interferometro di Michelson***, che sfrutta l'interferenza della luce fra due bracci.

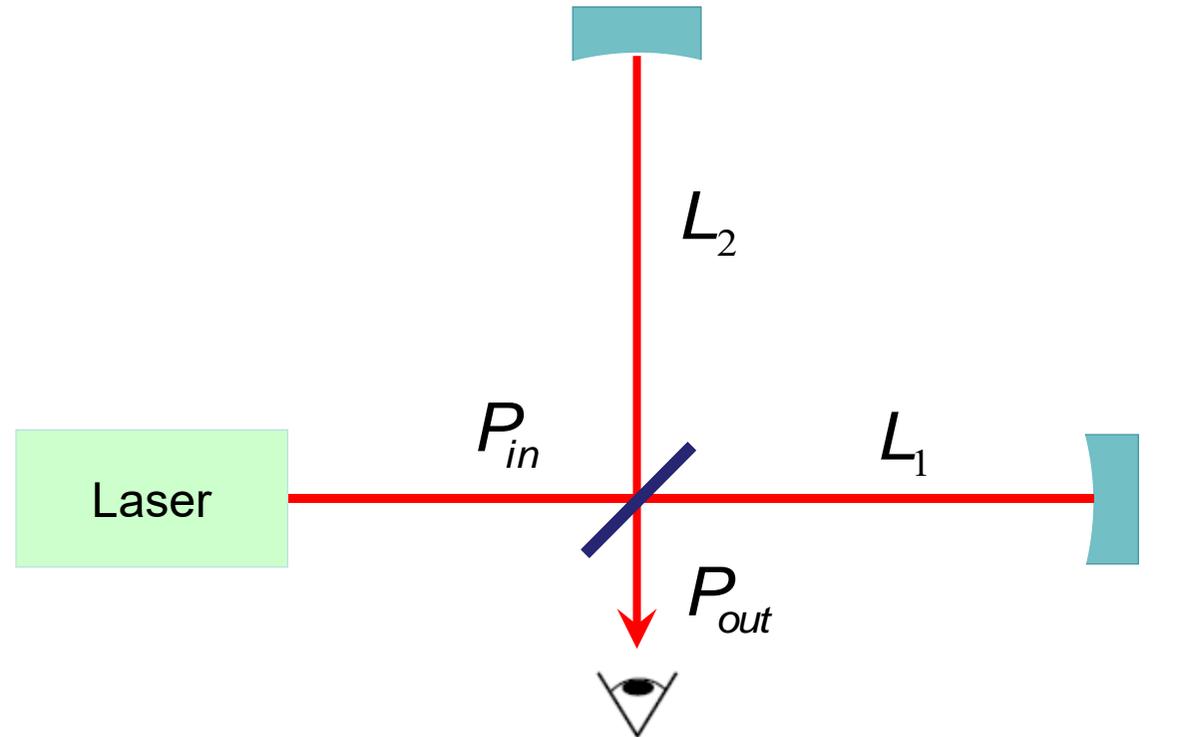


L'esperimento mostra che la velocità della luce non dipende dal moto relativo della Terra rispetto al sole ed esclude l'esistenza dell'etere. La luce si propaga alla velocità $c=3 \cdot 10^8$ m/s in tutti i sistemi di riferimento.

Questa osservazione è alla base della teoria della relatività di Einstein.

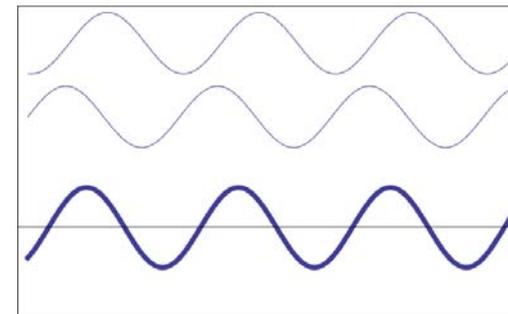


L'interferometro di Michelson

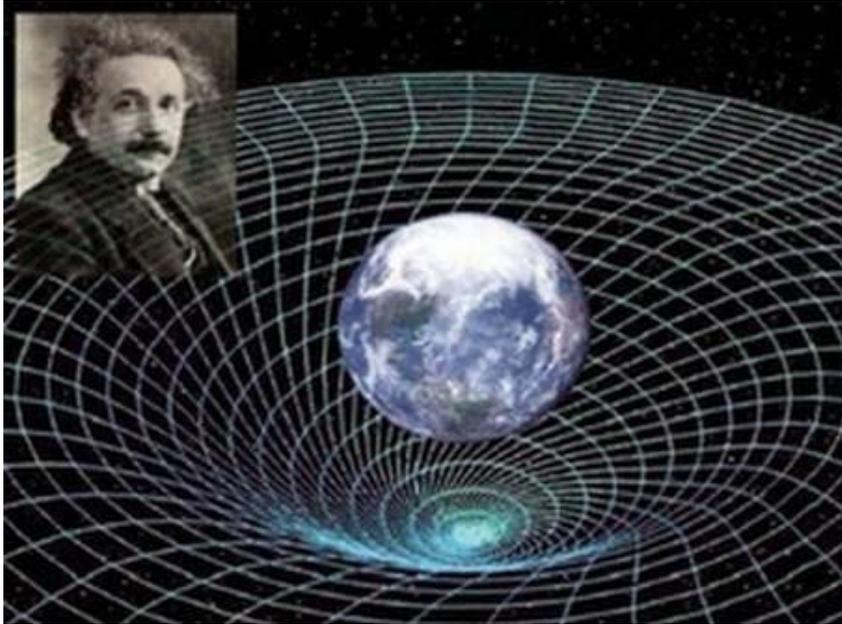


$$P_{out} = \frac{P_{in}}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{4\pi}{\lambda} (L_2 - L_1) \right] \right\}$$

⇒ si formano frange chiare/scure derivanti dall'interferenza costruttiva o distruttiva della luce che si propaga nei due bracci



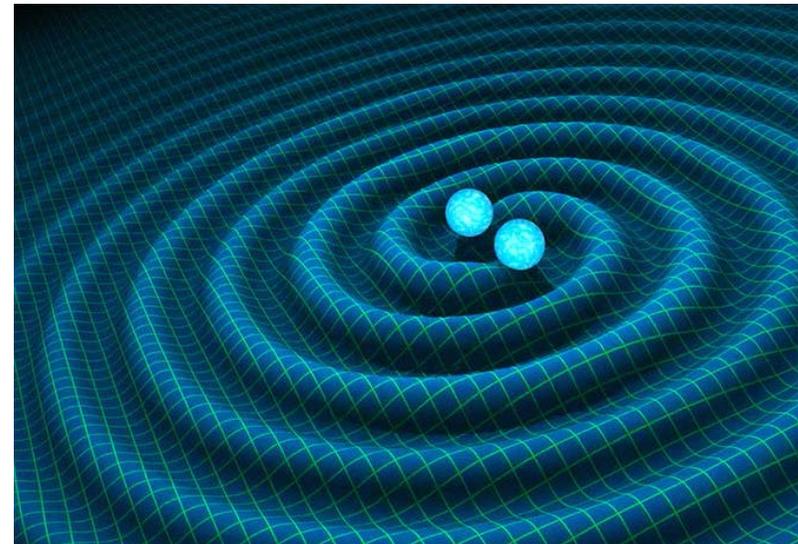
Le onde gravitazionali



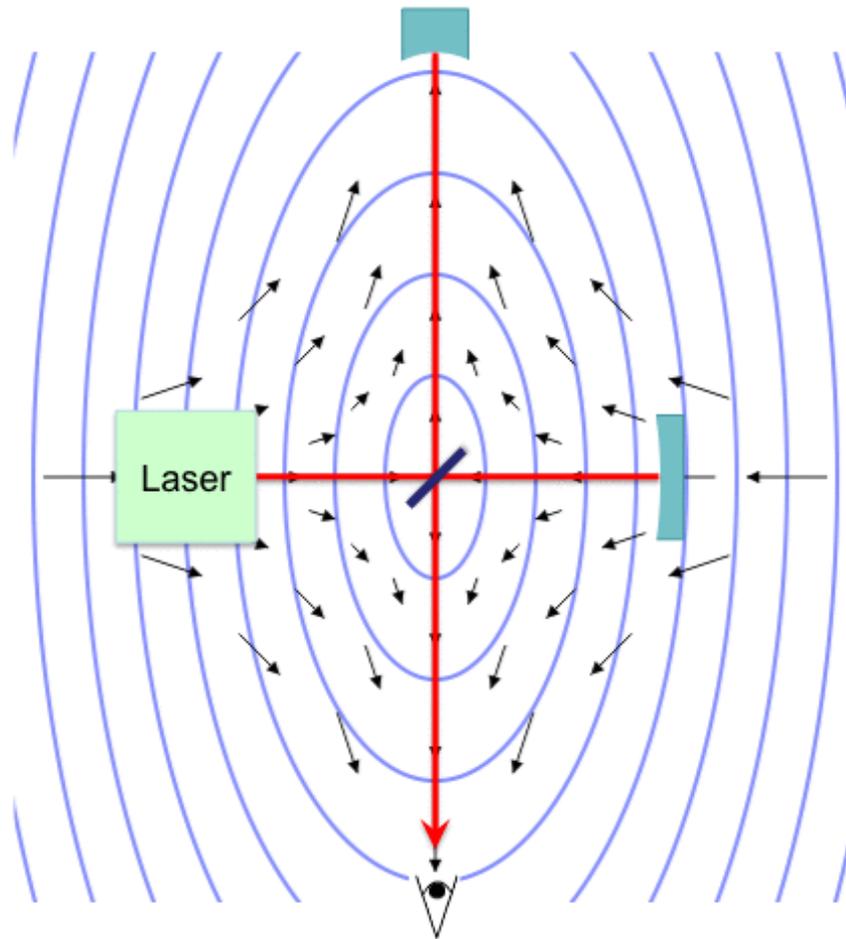
Le **onde gravitazionali** sono deformazioni della **curvatura** dello **spaziotempo** che si propagano come onde.

La loro esistenza fu prevista nel 1916 da Albert Einstein come conseguenza della sua teoria della **relatività generale**, ed è stata confermata sperimentalmente nel 2016.

Onde gravitazionali molto intense vengono generate da fenomeni cosmici in cui enormi masse variano la loro distribuzione in modo repentino, ad esempio **nell'esplosione di supernovae** o nella **collisione** di oggetti massivi come **buchi neri**.



Interferometro di Michelson e onde gravitazionali



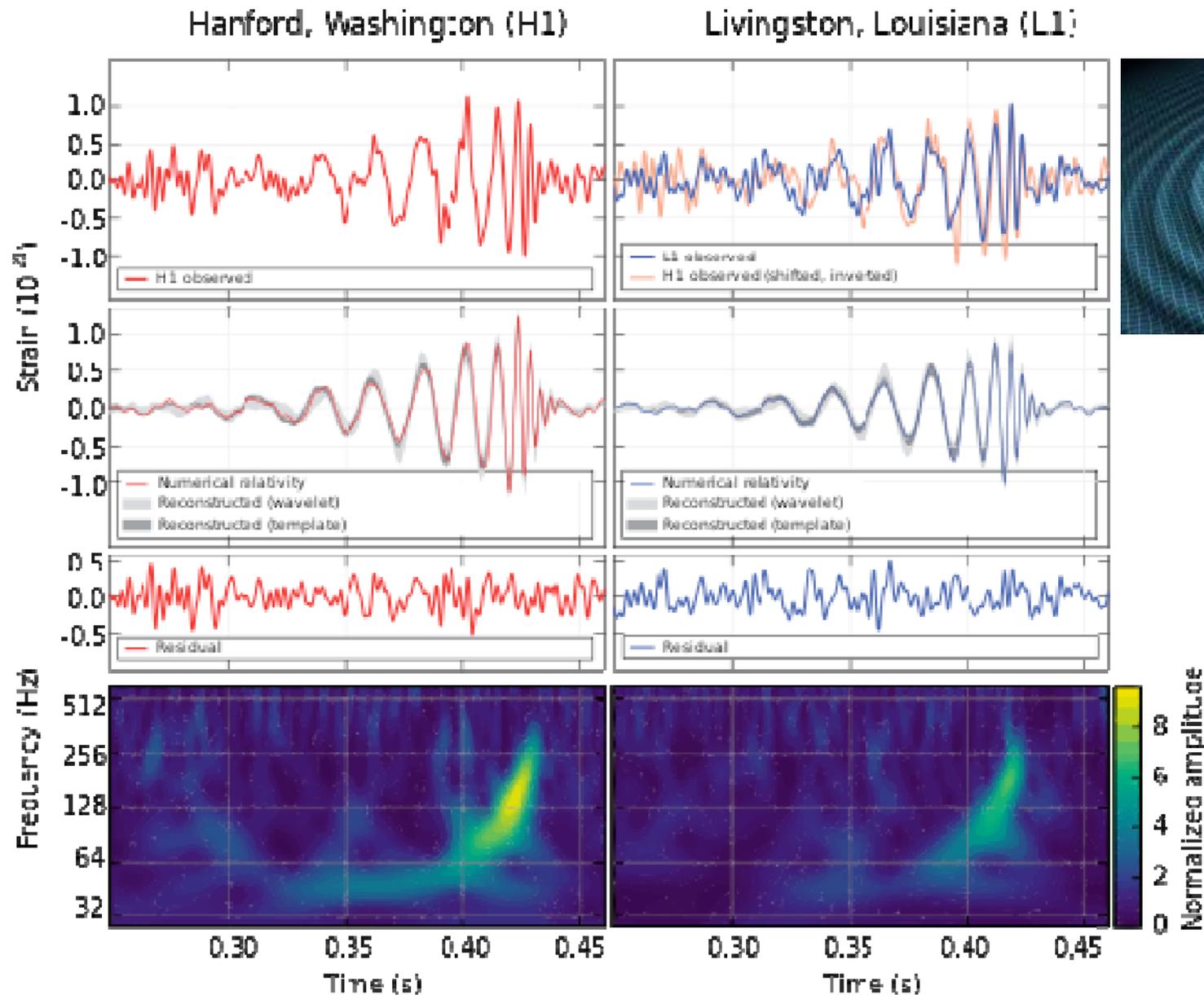
$$h = \frac{\Delta L}{L} \approx 10^{-21}$$

Al passaggio di un'onda gravitazionale, le distanze si **contraggono ed espandono** ritmicamente. Questo effetto è molto difficile da rilevare, perché comporta variazioni relative di lunghezza estremamente piccole.

L'interferometro VIRGO



Il primo segnale (fusione di due buchi neri: 14/09/2015, annunciato 11/02/2016. Nobel 2017)



Le onde gravitazionali: ascoltare l'universo



LIGO: Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory

<https://www.ligo.caltech.edu/video/ligo20160211v2>

Conclusioni

- ✓ Le onde sono caratterizzate da un **fase** che varia da 0 a 2π .
- ✓ La fase determina i fenomeni di **interferenza** e **diffrazione**.
- ✓ I fenomeni ondulatori sono comuni alla **fisica classica** e alla **fisica quantistica**.
- ✓ Il **laser** e i **superconduttori** sono sistemi con una fase coerente macroscopica
- ✓ L'**interferometria**, che permette di misurare le variazioni della fase, è una tecnica di misura estremamente sensibile – persino ai piccoli segnali delle **onde gravitazionali**.

Slides pdf sul sito web:
<https://fiscapaviaeducational.it/eventi/>